MA 07

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

SESSION DE 2007

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.
La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

L'énoncé comporte trois exercices indépendants.

Il n'est pas obligatoire de traiter les exercices dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement l'exercice et la question traitée en respectant l'indexation du texte.

Pour poursuivre la résolution d'un exercice, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Exercice 1

On appelle fonctions de type T_0 les fonctions « trinômes » sur $[-1, 1]$, définies par :

$$t : [-1, 1] \to \mathbf{R},\ x \mapsto t(x) = ax^2 + bx + c,$$

$a,\ b,\ c$ étant des réels quelconques. Pour tout entier naturel non nul n, on appelle fonctions de type T_n les fonctions de la forme $f + \lambda|g|$, λ étant un réel quelconque et $f,\ g$ des fonctions quelconques de type T_{n-1}.

1. Établir que la fonction φ, définie par $\varphi(x) = 0$ pour tout x de $[-1, 0]$ et $\varphi(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$, est de type T_1.
2. On considère deux fonctions trinômes t_1 et t_2 telles que $t_1(0) = t_2(0)$ et on définit la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbf{R}$ telle que :

   Pour tout réel x de $[-1, 0]$, $f(x) = t_1(x)$ et pour tout réel x de $[0, 1]$, $f(x) = t_2(x)$.

   Démontrer qu'il existe un entier naturel N tel que la fonction f soit de type T_N.

Exercice 2

On considère dans cet exercice tous les tableaux carrés à 9 cases dans lesquelles sont placés dans un certain ordre tous les entiers de 1 à 9. Par exemple :

1	8	7
9	2	4
6	5	3

À un tel tableau on associe les produits des éléments de ses lignes (56, 72, 90 dans l'exemple ci-dessus) et les produits des éléments de ses colonnes (54, 80, 84 dans l'exemple ci-dessus).

1. (a) Étant donné un tel tableau, montrer qu'il a au moins une ligne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 72.

   (b) Donner un tableau de ce type dont les trois lignes ont un produit de leurs éléments inférieur ou égal à 72.
2. Étant donné un tableau de ce type, montrer qu'il a au moins une ligne ou une colonne dont le produit des éléments est supérieur ou égal à 90.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC, on note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. On dira que ce triangle est de type $\mathscr{W}$ si ses médianes issues de A et B sont perpendiculaires.

Partie I : Géométrie

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations :

$$c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}.$$

   Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type $\mathscr{W}$.

2. Dans cette question on se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type $\mathscr{W}$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points G, isobarycentres de A, B et C, lorsque C décrit Γ.
   (b) En déduire l'ensemble Γ.
   (c) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.
   (d) Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque C décrit Γ (on se placera dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).

3. Dans cette question on se fixe des points A et C et on considère l'ensemble Γ' des points B tels que le triangle ABC soit de type $\mathscr{W}$.
   (a) Déterminer l'ensemble Γ'.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{a}{b}$.
   (c) Déterminer les triangles ABC de type $\mathscr{W}$ ayant un rayon du cercle circonscrit minimal.
   (d) Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque B décrit Γ' (on se placera dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et C aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(-5, 0)$).

4. (a) Montrer qu'un triangle ABC est de type $\mathscr{W}$ si, et seulement si, l'on a la relation

$$(\star) \qquad a^2 + b^2 = 5c^2.$$

   (b) Étant donné des réels strictement positifs a, b et c vérifiant la relation $(\star)$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathscr{W}$.

Partie II : Arithmétique

A. Deux familles de triangles

Dans la suite de l'exercice, on se propose de rechercher les triangles de type $\mathscr{W}$ dont les côtés ont des longueurs entières, en commençant par rechercher l'ensemble $\mathscr{T}$ des triplets (a, b, c) d'entiers naturels strictement positifs vérifiant la relation $(\star)$.

On remarque que pour qu'un triplet (a, b, c) d'entiers strictement positifs soit élément de $\mathscr{T}$, il suffit qu'il existe un entier strictement positif m tel que le triplet (ma, mb, mc) soit élément de $\mathscr{T}$, de sorte qu'on peut se limiter à rechercher l'ensemble $\mathscr{T}_1$ des éléments de $\mathscr{T}$ *sans facteur premier commun*.

1. (a) Montrer que si (a, b, c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors les entiers a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.
   (b) Établir que si (a, b, c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors a et b sont de parités différentes.
   (c) Montrer que si (a, b, c) est élément de $\mathscr{T}_1$ alors a et b ne sont divisibles ni par 3, ni par 4, ni par 5.
   (d) Soit (a, b, c) un élément de $\mathscr{T}_1$. Montrer que $b^2 - 4a^2$ et $a^2 - 4b^2$ sont des multiples de 5.
   En déduire qu'il existe un couple d'entiers (α, β) tels que l'on ait $\begin{cases} 2a + b &= 5\alpha \\ -a + 2b &= 5\beta \end{cases}$
   ou $\begin{cases} 2a - b &= 5\alpha \\ a + 2b &= 5\beta \end{cases}$. Vérifier alors que l'on a $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$, et que α et β sont premiers entre eux.
   (e) Si α et β sont des entiers premiers entre eux, les entiers a et b qui leur sont associés par les relations ci-dessus sont-ils premiers entre eux ?

On admet désormais le résultat suivant : les triplets (x, y, z) d'entiers strictement positifs sans facteur premier commun, vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$ et tels que y soit pair, sont donnés par $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$ et $z = u^2 + v^2$, où u et v sont des entiers strictement positifs premiers entre eux, de parités différentes et tels que $u > v$, déterminés de manière unique.

2. On dira qu'un triangle est de type $\mathscr{W}_e$ s'il est de type $\mathscr{W}$ et si les longueurs a, b et c de ses côtés sont des entiers sans facteur premier commun. Montrer que pour tout triangle de type $\mathscr{W}_e$, il existe des entiers strictement positifs u et v, premiers entre eux, de parités différentes et vérifiant $u > v$, tels que l'une des deux relations suivantes soit vérifiée :

(1) $$(a, b, c) = (2(u^2 - uv - v^2), u^2 + 4uv - v^2, u^2 + v^2)$$

(2) $$(a, b, c) = (2(u^2 + uv - v^2), -u^2 + 4uv + v^2, u^2 + v^2)$$

3. Déterminer les ensembles de couples (u, v) d'entiers positifs tels que la relation (1) (respectivement (2)) conduise à un triangle de type $\mathscr{W}_e$.
4. Établir qu'un triangle de type $\mathscr{W}_e$ est donné par une seule des deux relations (1) ou (2).
   On classe ainsi les triangles de type $\mathscr{W}_e$ en deux catégories disjointes, que l'on notera $\mathscr{W}_1$ et $\mathscr{W}_2$.
5. Donner les longueurs des côtés des triangles de type $\mathscr{W}_e$ dont le « petit » côté c a une longueur inférieure ou égale à 50.

B. Entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$ et leurs diviseurs

On se propose d'étudier les facteurs premiers supérieurs ou égaux à 7 des entiers a et b, longueurs des côtés BC et CA d'un triangle de type $\mathscr{W}_e$.

1. On note ω et ω' les solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.
   Établir la relation $u^2 - uv - v^2 = (u - \omega v)(u - \omega' v)$. En déduire que l'ensemble des entiers de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires, est stable par multiplication.
   Que peut-on dire de l'ensemble des entiers de la forme $u^2 + 4uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs arbitraires ?

2. Soit $p = 2q + 1$ un nombre premier strictement supérieur à 5 qui divise un entier de la forme $u^2 - uv - v^2$, où u et v sont des entiers relatifs premiers entre eux.
   (a) Établir les congruences $(2u - v)^2 \equiv 5v^2$ modulo p et $(u + 2v)^2 \equiv 5u^2$ modulo p.
   (b) En déduire que $5^q \equiv 1$ modulo p.
   (c) Soit j un entier compris entre 1 et q, on note r_j le reste de la division de $5j$ par p. Si $r_j \leqslant q$ on pose $f(j) = r_j$ et $\varepsilon(j) = 1$; dans le cas contraire on pose $f(j) = p - r_j$ et $\varepsilon(j) = -1$, de sorte que l'on a dans tous les cas $1 \leqslant f(j) \leqslant q$ et $5j \equiv \varepsilon(j)f(j)$ modulo p.
   Montrer que les entiers $f(1), f(2), \ldots, f(q)$ sont deux à deux distincts et en déduire que le nombre d'entiers j, compris entre 1 et q et tels que $\varepsilon(j) = -1$, est pair.
   (d) Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, à savoir le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.
   Montrer que $\left\lfloor \frac{4p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{3p}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2p}{10} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{p}{10} \right\rfloor$ est pair, puis que $p \equiv \pm 1$ modulo 10.

3. Soient (a, b, c) les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathscr{W}_e$.
   (a) Montrer que tous les facteurs premiers impairs de a sont congrus à 1 ou à 9 modulo 10.
   (b) Que peut-on dire des facteurs premiers de b ?