

# CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES

---

SESSION DE 2004

---

## COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Classe terminale S)

DURÉE : 5 heures

---

La calculatrice de poche est autorisée, conformément à la réglementation.

La clarté et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

*Le problème comporte six parties qui sont très largement indépendantes.*

*Il n'est donc pas obligatoire de traiter systématiquement les questions dans l'ordre de l'énoncé, à condition d'indiquer clairement la question traitée en respectant l'indexation du texte.*

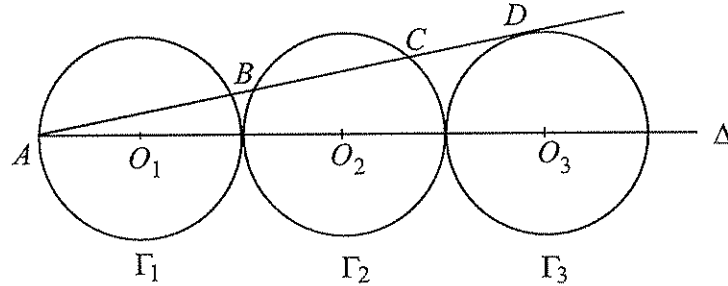
*De même, pour poursuivre, les candidats peuvent admettre les résultats d'une question, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.*

## Partie I : une famille de cercles tangents

Dans le plan, soit  $A$  un point et  $\Delta$  une demi-droite d'origine  $A$ .

1- On considère trois cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  de même rayon  $r$  non nul, de centres respectifs  $O_1, O_2, O_3$  distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite  $\Delta$ . Le cercle  $\Gamma_1$  passe par  $A$  et le cercle  $\Gamma_2$  est tangent aux cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ .

Les diamètres des cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  sur la demi-droite  $\Delta$  sont notés respectivement  $[AA_1], [A_1A_2]$  et  $[A_2A_3]$ .



Par le point  $A$ , on mène une droite  $(AD)$  tangente en  $D$  au cercle  $\Gamma_3$ .

a) Montrer que la droite  $(AD)$  coupe le cercle  $\Gamma_2$  en deux points distincts  $B$  et  $C$ . Calculer la longueur  $BC$ .

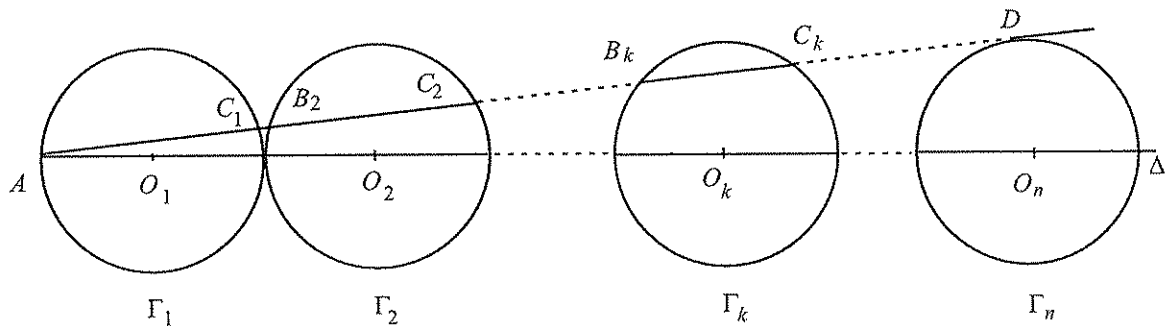
b) Montrer que les droites  $(BA_1)$  et  $(CA_2)$  sont sécantes; on note  $P$  leur point d'intersection.

Montrer de même que les droites  $(CA_1)$  et  $(BA_2)$  sont sécantes; on note  $Q$  leur point d'intersection.

Que peut-on dire de la direction de la droite  $(PQ)$ ?

2- Plus généralement, on considère un entier  $n$  strictement supérieur à 1 et  $n$  cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  de même rayon  $r$  strictement positif, de centres respectifs  $O_1, O_2, \dots, O_n$  distincts et alignés dans cet ordre sur la demi-droite  $\Delta$ . Le cercle  $\Gamma_1$  passe par  $A$  et, pour tout  $k > 1$ , le cercle  $\Gamma_k$  est tangent au cercle  $\Gamma_{k-1}$ .

Les diamètres des cercles  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  sur la droite  $\Delta$  sont notés respectivement  $[AA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n]$ .



Par le point  $A$ , on mène une droite  $(AD)$  tangente en  $D$  au cercle  $\Gamma_n$ . Montrer que, pour tout  $k$  entier tel que  $1 \leq k \leq n-1$ , cette droite coupe le cercle  $\Gamma_k$  en deux points distincts  $B_k$  et  $C_k$  (on remarque que  $B_1 = A$ ).

a) Calculer la longueur  $B_k C_k$  en fonction de  $n$ , de  $k$  et de  $r$ .

**Dans toute la suite du problème, on prend  $r = 1$ . On pose  $L(n, k) = B_k C_k$ .**

b) Montrer que pour que  $L(n, k)$  soit rationnel il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :

$$(C_1) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } n(n-1) - k(k-1) = 4a^2$$

## Partie II : étude d'une surface

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Les coordonnées (respectivement l'abscisse, l'ordonnée et la cote) d'un point sont notées  $x, y$  et  $z$ .

On considère l'ensemble  $\Sigma$  des points  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$  vérifiant

$$z^2 = x(x-1) - y(y-1)$$

1- Soit  $\lambda$  un réel et  $P_\lambda$  le plan d'équation  $x = \lambda$ .

Montrer que l'intersection de  $\Sigma$  et de  $P_\lambda$  est un cercle  $C_\lambda$  dont on déterminera, en fonction de  $\lambda$ , le centre et le rayon.

2- Soit  $I$  le point de coordonnées  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  et  $(d)$  la droite passant par  $I$  de vecteur directeur  $\vec{i}$ .

Montrer que la droite  $(d)$  est un axe de symétrie de  $\Sigma$ . Déterminer et dessiner l'intersection de  $\Sigma$  et du plan d'équation  $y = \frac{1}{2}$ .

3- Reconnaître la nature de l'ensemble  $\Sigma$ .

4- Soit un entier  $n$  strictement supérieur à 2 et un entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n-1$ . Montrer que  $L(n, k)$  est rationnel si, et seulement si, les points de  $\Sigma$  d'abscisse  $n$  et d'ordonnée  $k$  ont pour cote un nombre entier pair.

## Partie III : étude d'une limite

À partir de la configuration étudiée au I.2, on définit  $\lambda_n$  comme la proportion du segment  $[AD]$

située à l'intérieur des cercles  $(\Gamma_k)$ , pour  $1 \leq k \leq n-1$ . Ainsi, on a  $\lambda_n = \frac{1}{AD} \sum_{k=1}^{n-1} B_k C_k$ .

### 1- Calculs d'intégrales

On définit la fonction  $f$ , de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , par : pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $f(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$ ,

puis la fonction  $F$ , de  $[0, \frac{\pi}{2}]$  dans  $\mathbb{R}$ , par : pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $F(x) = f(\sin x)$ .

a) Montrer que la fonction  $F$  est dérivable et calculer sa dérivée, notée  $F'$ .

b) Montrer que, pour tout  $x$  dans  $[0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $F(x) = \int_0^x \cos^2 t dt$ .

c) Sans chercher à calculer les intégrales, démontrer l'égalité  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$  et en déduire la valeur commune des deux intégrales.

d) En déduire que  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{4}$ ; interpréter géométriquement ce résultat.

2- a) Montrer que pour tout  $n \geq 2$ ,  $\lambda_n = \frac{2}{2n-1} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 - \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1}}$ .

b) Montrer que si  $n \geq 2$  et  $1 \leq k \leq n$ , on a :  $(\frac{k-1}{n})^2 \leq \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \leq (\frac{k}{n})^2$

c) On pose  $I_{n,k} = \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \sqrt{1-t^2} dt$ .

Montrer que pour des valeurs convenables de  $n$  et  $k$ , que l'on précisera, on a :

$$nI_{n,k+1} \leq \sqrt{1 - \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{k}{n}} \leq nI_{n,k-1}$$

3- Démontrer, à partir des résultats des questions 1 et 2 ci-dessus, que la suite  $(\lambda_n)$  est convergente et calculer sa limite.

## Partie IV : étude de la condition $(C_1)$

On considère deux entiers  $n$  et  $k$  tels que  $1 \leq k \leq n - 1$ .

- 1- On pose  $p = 2n - 1$  et  $q = 2k - 1$ . Montrer que le couple  $(n, k)$  vérifie la condition  $C_1$  si, et seulement si,  $(p, q)$  est un couple d'entiers naturels impairs tels que  $q < p$ , vérifiant la condition  $(C_2)$  suivante :

$$(C_2) \quad \text{il existe } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } p^2 - q^2 = 16a^2$$

- 2- Soit  $(p, q)$  un couple de nombres entiers naturels, tel qu'il existe deux entiers  $u > 0$  et  $v > 0$ , de parités différentes, pour lesquels  $p = u^2 + v^2$  et  $q = u^2 - v^2$ . Montrer que  $(p, q)$  est un couple d'entiers naturels impairs tels que  $q < p$  vérifiant la condition  $(C_2)$ .
- 3- On considère un couple  $(p, q)$ , d'entiers naturels impairs et premiers entre eux, tels que  $q < p$  et vérifiant la condition  $(C_2)$ . Montrer qu'il existe deux entiers naturels  $u$  et  $v$  de parités différentes tels que  $p = u^2 + v^2$  et  $q = u^2 - v^2$ . Calculer alors, en fonction de  $u$  et de  $v$ , la valeur de l'entier  $a$  qui intervient dans la condition  $(C_2)$ .

## Partie V : nombre premier somme de deux carrés

*On se propose dans cette partie de déterminer tous les nombres premiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux carrés d'entiers naturels. On désignera plus simplement un tel nombre comme étant « somme de deux carrés ».*

- 1- a) Montrer que si  $n$  est un entier naturel impair somme de deux carrés, il est congru à 1 modulo 4.  
 b) Écrire 2 et 5 comme somme de deux carrés.

*Dans la suite de la partie V,  $p$  désigne un nombre premier congru à 1 modulo 4 et strictement supérieur à 5. On l'écrit sous la forme  $p = 4m + 1$  (avec  $m > 2$ ).*

*On définit  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 4xy + z^2 = p\}$ .*

- 2- a) Montrer que  $S$  est un ensemble fini non vide et que l'intersection de  $S$  et de l'ensemble d'équation  $x = y + z$  est vide.  
 b) À tout triplet  $(x, y, z)$  de  $S$ , on associe le triplet  $(x', y', z')$  défini par

$$(x', y', z') = \begin{cases} (x - y - z, y, 2y + z) & \text{si } x > y + z \\ (y + z - x, x, 2x - z) & \text{si } x < y + z \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $(x, y, z)$  de  $S$ ,  $(x', y', z')$  est aussi élément de  $S$ .

*On considère désormais la suite de triplets dans  $S$  définie en itérant le procédé précédent de la manière suivante :*

- On part du triplet  $(x_0, y_0, z_0) = (m, 1, 1)$  ;
- $(x_k, y_k, z_k)$  ayant été défini dans  $S$ , on prend  $x_{k+1} = x'_k, y_{k+1} = y'_k, z_{k+1} = z'_k$ .

- 3- a) Étude d'un cas particulier. Dans cette question seulement, on prend  $m = 10$ . Déterminer les triplets  $(x_k, y_k, z_k)$  pour  $0 \leq k \leq 11$ .

- b) Montrer que si  $(a, b, c) = (x_k, y_k, z_k)$ , avec  $k \geq 2$ , alors le triplet  $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1})$  est :

$$\begin{cases} (a - b + c, b, c - 2b) & \text{si } a - 4b + 2c > 0 \\ (b, a - b + c, 2b - c) & \text{si } a - 4b + 2c < 0 \end{cases}$$

Montrer que ce résultat est encore vrai pour  $k = 1$ .

- c) Montrer qu'il existe deux entiers distincts  $k$  et  $\ell$  tels que  $(x_k, y_k, z_k) = (x_\ell, y_\ell, z_\ell)$ .

En déduire qu'il existe un entier  $n$  strictement positif tel que  $(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1)$ .

*On note désormais  $n$  le plus petit entier strictement positif tel que*

$$(x_n, y_n, z_n) = (m, 1, 1).$$

- 4- a) Calculer  $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$  et  $(x_{n-2}, y_{n-2}, z_{n-2})$ .

b) Montrer que, pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq n$  :

$$(x_{j-1}, y_{j-1}, z_{j-1}) = \begin{cases} (x_{n-j}, y_{n-j}, -z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} > y_{j-1} + z_{j-1} \\ (y_{n-j}, x_{n-j}, z_{n-j}) & \text{si } x_{j-1} < y_{j-1} + z_{j-1} \end{cases}$$

c) Montrer que  $n$  est impair. On pose désormais  $n = 2r + 1$ .

d) Montrer que  $x_r = y_r$ . En déduire qu'il existe une décomposition de  $p$  en somme de deux carrés.

5- a) Déduire des questions précédentes un algorithme permettant de décomposer  $p$  en somme de deux carrés.

b) Donner le plus petit nombre premier supérieur à 40 qui est somme de deux carrés et, à l'aide de cet algorithme, en préciser une décomposition (on indiquera les triplets calculés aux différentes étapes de l'itération).

## Partie VI : retour au problème initial

1- Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels somme de deux carrés,  $n = a^2 + b^2$ ,  $m = c^2 + d^2$ . En introduisant les nombres complexes  $a + ib$  et  $c + id$  et en considérant  $n = |a + ib|^2$  et  $m = |c + id|^2$ , montrer que le produit  $mn$  est un entier somme de deux carrés et en donner explicitement une décomposition en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ .

2- On se propose de démontrer, pour tout entier  $n$  strictement positif, la proposition  $\mathcal{P}(n)$  suivante :

$\mathcal{P}(n)$  : « tout nombre premier qui divise  $n^2 + 1$  est somme de deux carrés ».

Pour cela, on procède par récurrence sur  $n$ .

a) Montrer que  $\mathcal{P}(1)$ ,  $\mathcal{P}(2)$  et  $\mathcal{P}(3)$  sont vraies.

b) Soit  $n$  un entier strictement supérieur à 1. On suppose la proposition  $\mathcal{P}(i)$  vraie pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq n - 1$  et on considère un nombre premier  $p$  qui divise  $n^2 + 1$ .

i) Montrer que  $p$  est différent de  $n$ .

ii) On suppose  $p < n$ . Montrer que  $p$  divise  $(n - p)^2 + 1$ .

iii) On suppose  $p > n$  et  $p < n^2 + 1$ . Montrer que les autres diviseurs premiers de  $n^2 + 1$  sont strictement inférieurs à  $n$ . En déduire, en discutant selon la parité de  $n$ , que  $p$  est congru à 1 modulo 4.

iv) Montrer que  $p$  est somme de deux carrés.

c) Conclure.

3- a) Pour  $s$  entier supérieur ou égal à 2, on note  $p_s$  le plus petit diviseur premier du nombre  $(s!)^2 + 1$ .

Montrer que  $p_s > s$  et que  $p_s$  est somme de deux carrés.

b) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers somme de deux carrés.

4- a) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers  $(n, k)$  avec  $1 \leq k < n$  tels que  $L(n, k)$  soit rationnel.

b) Déterminer un entier  $n$  tel qu'il existe plusieurs valeurs de  $k$  pour lesquelles  $L(n, k)$  est rationnel.

\*\*\*  
\*