CONCOURS GENERAL 1995

Exercice I

Dans un plan P, on se donne un triangle ABC. A toute droite D, non parallèle à l'un de ses côtés, on associe le point G_D, isobarycentre des trois points communs à D et aux droites (AB), (BC) et (CA). L'objet de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points G_D lorsque D varie.

1. Démontrer, que lorsque D se déplace en restant parallèle à une droite δ, le point G_D décrit une droite Δ_δ.
2. On suppose, dans cette question seulement, ABC équilatéral. Montrer que, lorsque δ varie, les droites Δ_δ sont toutes tangentes à un même cercle et déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ dans ce cas.
3. On revient au cas général. Montrer que l'on peut trouver un triangle équilatéral $A'B'C'$ de l'espace dont le projeté orthogonal sur le plan P est le triangle ABC et en déduire l'ensemble $\mathcal{F}$.

Exercice II

Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geqslant 0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+1}$$

Exercice III

Dans le plan, on considère Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles de rayon R passant par le point O, et on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des points du plan intérieurs à au moins deux de ces cercles.
Comment doit-on placer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 pour que l'aire de $\mathcal{D}$ soit minimale ? Justifier votre réponse.

Exercice IV

Soient A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 six points du plan tels que l'on ait pour tous les entiers i et j de $\{1, 2, 3\}$

$$A_iB_j = i + j$$

Que peut-on dire de ces six points ?